ESTADO DO PARANÁ
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENSINO DE JOVENS E ADULTOS

MATEMÁTICA

ENSINO FUNDAMENTAL – FASEII

CADERNO 4

GOVERNO DO ESTADO DO PARANÁ
Jaime Lerner

SECRETÁRIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
Alcyone Saliba

DIRETORA GERAL DA SEED
Sônia Loyola

CHEFE DO DEPARTAMENTO DE ENSINO SUPLETIVO
Regina Célia Alegro

ASSISTENTE TÉCNICO ADMINISTRATIVO
Annete Elise Siedel

EQUIPE ELABORADORA (1ª VERSÃO)
Cristina N. Nakamura - CEEBJA de Maringá
Leoni Teresa M. Brudzinski - CEEBJA de Maringá
Sachika Sakai Takizawa - CEEBJA de Maringá
Vera Lúcia G. T. Sanches - CEEBJA de Maringá

EQUIPE COLABORADORA
Graça Rejane C. Montanher - CEEBJA de Maringá
Mafalda D. Nascimento - CEEBJA de Nova Londrina
Missayo Yamada - CEEBJA de Jandaia do Sul
Neide Aparecida de S. Moreira - CEEBJA de Jandaia do Sul
Neuza Pinto - CEEBJA de Paranavaí

EQUIPE REVISORA
Cristina Nishioka Nakamura - CEEBJA de Maringá
Mirian Nazaré B. Damaceno - CEEBJA de Maringá

EQUIPE REVISORA (VERSÃO ATUAL)
CEEBJA Paulo Freire
CEEBJA SESI-CIC

CAPA
Rosângela Gonçalves de Oliveira

ILUSTRAÇÃO
Henrique Cesar Alves de Cerqueira
Jairo de Carvalho

DIAGRAMAÇÃO
Luiz Carlos Tavares de Sá

APRESENTAÇÃO

Este material foi preparado com a intenção de ajudá-lo a compreender idéias e conceitos importantes da Matemática e a suas relações com a vida diária. Esperamos que, quando necessário, você possa aplicar esses conhecimentos em situações novas, resolvendo seus problemas do dia-a-dia.

Ele foi escrito numa linguagem simples e informal, cuja a intenção é levá-la a compreensão dos assuntos básicos da Matemática, da maneira mais clara possível.

Os conhecimentos matemáticos foram construídos ao longo do tempo e, por acharmos importante para você, apresentamos também alguns aspectos históricos dessa construção.

Nossa expectativa é que esse material torne útil e interessante o seu Curso de Matemática de 5ª a 8ª série de 1º grau.

EQUIPE ELABORADORA

ÍNDICE

UNIDADE 1

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA

1 – LINGUAGEM ALGÉBRICA

Na Antigüidade recorria-se ao uso de palavras para indicar os cálculos e as operações, na resolução de problemas. Com isso, os cálculos tornavam-se longos e cansativos.

Mas, com o passar do tempo, superando muitas dificuldades, os homens foram lentamente aprendendo a substituir as palavras por letras e as operações por sinais, para tornar os cálculos mais fáceis.

Foi por volta do Século III, antes de Cristo, que o filósofo grego Aristóteles e o matemático Euclides, passaram a usar letras e símbolos, de forma limitada, para representar números e indicar a solução de um problema.

Muitos séculos se passaram, até 1572, quando o matemático Raffaele Bombeli publicou sua obra, L'Algebra, que muito contribuiu para o desenvolvimento da linguagem algébrica.

Foi, porém o matemático francês François Viète (1540 – 1603) que introduziu o uso sistemático dos símbolos das letras para representar os números, da maneira que são usados até hoje.

Por esse motivo, é considerado o Pai da Álgebra.

Hoje, vivemos numa sociedade onde a quantidade de informações numéricas que nos são apresentadas dia – a – dia são imensas e variadas. E, para resolver os problemas decorrentes dessas informações, podemos traduzí-los para a linguagem da álgebra.

Observe, a seguir, sentenças que estão expressas com palavras, bem como sua representação na linguagem matemática:

a) Um número mais o quádruplo dele é igual a 10 $\Rightarrow c + 4c = 10$

b) A metade do número de eleitores de uma cidade é igual a 1642 $\Rightarrow \frac{c}{2} = 1642$

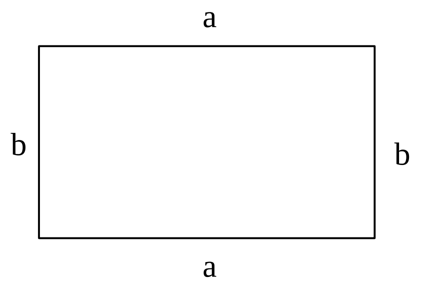
c) Os três quartos de um números menos dois é igual a 35 $\Rightarrow \frac{3}{4}x - 2 = 35$

d) Um número adicionado ao se dobro dá Vinte e oito $\Rightarrow x + 2x = 28$

2 – EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Vamos considerar a seguinte situação:

O quintal da casa de Érika, tem as dimensões (em metros) representadas na figura abaixo, observe:



Como podemos representar o contorno desse quintal?

A representação algébrica desse contorno, pode ser:

a + b + a + b ou **2 a + 2 b** metros

Observamos que na expressão 2a + 2b aparecem números e letras.

Dizemos, então, que:

> ***Uma expressão matemática que apresenta somente letras ou números e letras é chamada de expressão algébrica ou literal.***

Veja que a expressão algébrica **2a + 2b** é formado por duas parcelas que são chamadas de **termos algébricos.**

No termo algébrico ou monômio **2a** destacamos:

- A parte numérica **(2)**, chamada de coeficiente numérico
- A letra **(a)**, chamada de parte literal.

A expressão algébrica composta por mais de um monômio é chamada de **polinômio.**

É o caso da expressão algébrica 2a + 2b.

ATIVIDADE - I

1) Faça a tradução para a linguagem matemática:

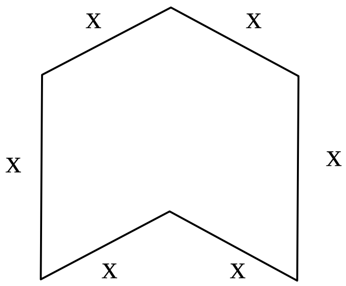
a) O dobro de um número.
b) O triplo de um número.
c) A metade de um número.
d) A terça parte de um número.
e) Dois terços de um número.
f) Um número mais quatro.
g) O triplo de um número menos dois.
h) Dois quintos de um número acrescidos de quinze.
i) O dobro de um número mais oito.
j) A metade de um número aumentado de dez.
k) A diferença entre um número e sete.
l) A quarta parte de um número, mais vinte.
m) A terça parte de um número, menos o seu dobro.

2) Uma creche tem x crianças. Escreva a expressão algébrica que representa:

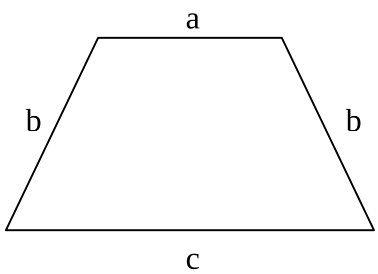
a) o dobro do número de crianças;
b) a quinta parte do número de crianças;
c) o número de crianças que a creche teria se saíssem quinze crianças.

3) Escreva a expressão algébrica que representa o perímetro das seguintes figuras:

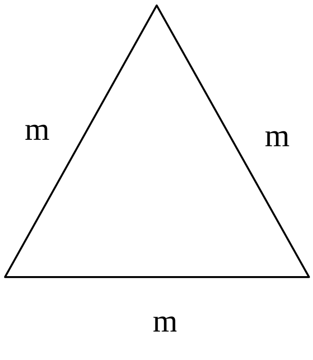
a)



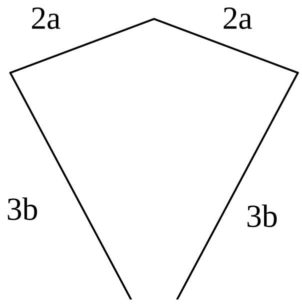
b)



c)



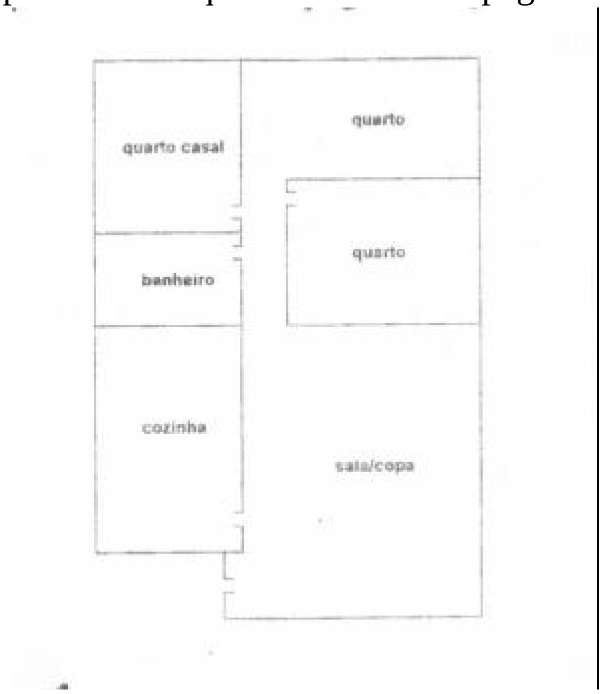
d)



U N I D A D E 2
OPERAÇÕES ALGÉBRICAS

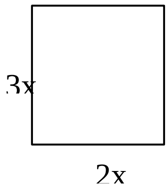
1 – OPERAÇÕES COM MONÔMIOS

A observação da planta da casa de D. Emília é fundamental para resolver as situações - problema de que trataremos nas páginas seguintes:



Situação – 1
ADIÇÃO DE MONÔMIOS

D. Emília quer colocar rodapé no contorno da cozinha, cujas dimensões estão representadas no desenho abaixo. Vamos ajudá-la!



O contorno da cozinha pode ser encontrado calculando o perímetro do retângulo que a representa. Ou seja:

$$\mathbf{3x + 2x + 3x + 2x = (3 + 2 + 3 + 2) . x = 10x}$$

O que fizemos foi uma adição de monômios. Para isso, somamos os coeficientes (parte numérica) e repetimos a parte literal (letras), quando forem iguais.

Os termos que possuem partes literais iguais, chamamos de **termos semelhantes.**

Logo, 3x e 2x são exemplos de termos semelhantes.

Só podemos fazer a adição de monômios, quando os termos algébricos têm a mesma parte literal, ou seja, são semelhantes.

Logo, o contorno da cozinha é 10x.

Situação – 2

MULTIPLICAÇÃO DE MONÔMIOS

D. Emília quer calcular a área da cozinha para colocar piso. Vamos ajudá-la!

Você já sabe que a largura da cozinha é 3x e o comprimento é 2x.

Podemos representar no desenho:

X^2	X^2	1x
X^2	X^2	1x
X^2	X^2	1x
1x	1x	

Você pode encontrar a área contando os quadrinhos de área x^2.

Qual é a área que você encontrou?

Outra maneira de encontrar essa área é fazendo o produto:

$$\mathbf{3x \cdot 2x = (3 \cdot 2) \cdot x \cdot x = 6}\,x^2$$

Você multiplicou a parte numérica e somou-se os expoentes da parte lateral. A esta operação chamamos multiplicação de monômios.

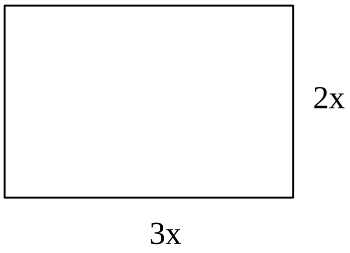
Para efetuar a multiplicação da parte literal, utilizamos a propriedade da multiplicação de potências de mesma base.

$a^m \text{ x } a^n = a^{m+n}$

Na multiplicação de potências de mesma base, conserva-se base e somam-se os expoentes.

ATIVIDADE - II

1) Observe a figura e responda:

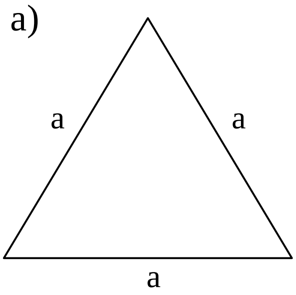


a) Qual é a expressão algébrica que representa a área desse retângulo?

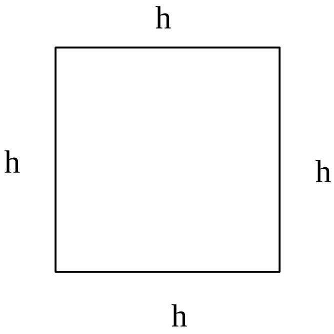
b) Qual é a expressão algébrica do perímetro desse retângulo? Essa expressão pode ser reduzida a um só termo?

2) Qual é o monômio que representa o perímetro das seguintes figuras:

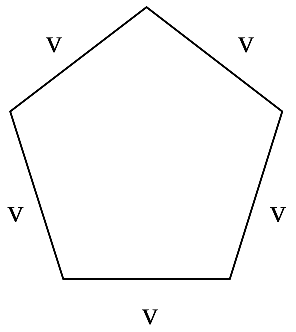
a)



b)

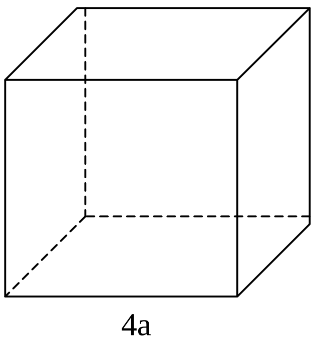


c)

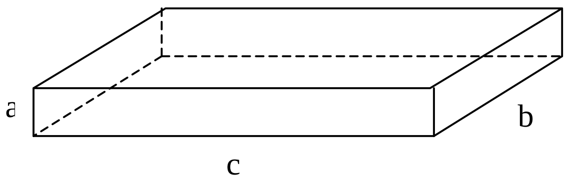


3) Qual é o perímetro que representa o volume das figuras:

a)



b)

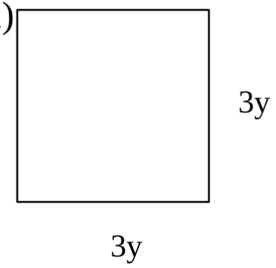


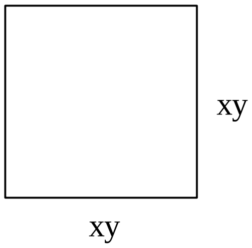
4) Responda:

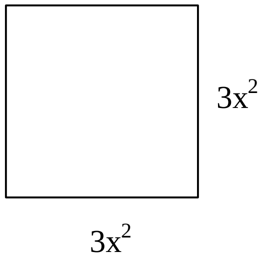
a) Quanto dá o produto de $-3x^2$ por $5xy$?

b) Qual é o produto entre $8ab$ e $-ab$?

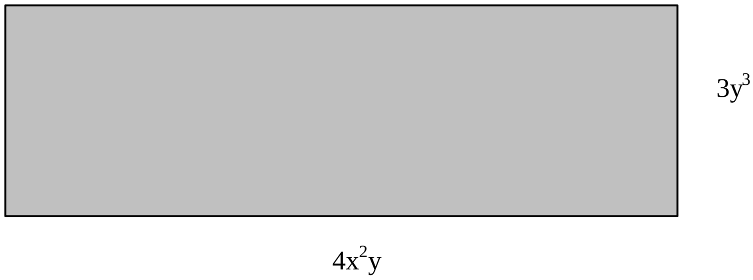
5) Calcule a área das figuras abaixo:

a)


b)


c)


6) Observe abaixo e responda:



a) Qual é a expressão algébrica que representa a área desse retângulo?

b) A parte literal do monômio que representa a área do retângulo é $x^2 y^4$? Explique como chegou-se a esse resultado.

Situação - 3

SUBTRAÇÃO DE MONÔMIOS

Quando D. Emília chegou à loja para comprar o piso, encontrou uma oferta. Resolveu calcular para saber se o piso dava para a cozinha. Descobriu que o total do piso em oferta era $8x^2$.

Como a área que D. Emília precisa é $6x^2$, o piso em oferta será suficiente?

Sobrará ou faltará?

Quanto?

Para saber quanto vai sobrar, você tem que calcular a diferença, mas como?

Assim:

$$\mathbf{8x^2 - 6x^2 = (8 - 6) \cdot x^2 = 2x^2}$$

O que fizemos foi uma subtração de monômios. Para fazer esse cálculo subtraem-se os coeficientes numéricos e repete-se a parte literal. Esta operação só é possível com monômios semelhantes.

Situação - 4

DIVISÃO DE MONÔMIOS

Mas a loja só venderia parte dessa mercadoria (piso) se sobrasse pelo menos $3x^2$.

Por isso, D. Emília não pôde comprar o piso nessa loja.

Como ainda precisa do piso para a cozinha, D. Emília foi a outra loja. Lá encontrou um lote de lajotas de $18x^2$, o preço estava bom, resolveu levar. Curiosa, pensou em quantas cozinhas do tamanho da sua dariam para forrar com aquelas lajotas.

Vamos ajudá-la:

Se tem $18x^2$ de lajotas e cada cozinha tem $6x^2$ de área, basta que se faça uma divisão, assim:

$$18x^2 : 6x^2 = \underbrace{(18 : 6)}_{3} . \underbrace{(x^2 : x^2)}_{x^{2-2}} = 3x^{2-2} = 3x^0 = \mathbf{3 . 1 = 3}$$

O que fizemos foi uma divisão de monômios. Para fazer esse cálculo, devemos dividir a parte numérica .E a parte literal diminui-se os expoentes

Para efetuar a divisão da parte literal, usamos a propriedade da divisão de potências de mesma base:

$a^m : a^n = a^{m-n}$

Na divisão de potências de mesma base, conserva-se a base e subtraem-se os expoentes.

Logo, a quantidade de lajota daria para 3 cozinhas iguais a de D. Emília.

ATIVIDADE – III

1) Um litro de leite custa x reais. Yai comprou três litros de leite. Pagou com 5x reais.

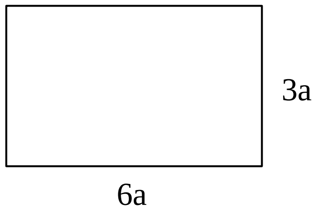
Nessas condições, responda:

a) Qual é o monômio que representa o preço de 3 litros de leite?

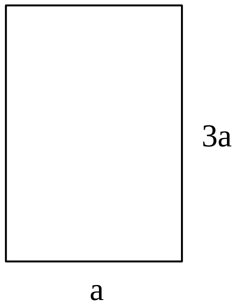
b) Qual é a expressão algébrica que representa o troco que Yai recebeu?

2) Observe as figuras abaixo e responda:

(figura 1)



(figura 2)



a) Qual é o monômio que representa o perímetro da figura 1?
b) Qual é o monômio que representa o perímetro da figura 2?
c) Calcule a diferença entre os perímetros das figuras 1 e 2.

3) Determine os monômios que representam a seguinte situação: um sorvete custa x reais. Leonardo comprou 3 sorvetes e Carolina 5.

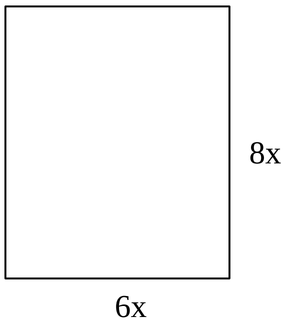
a) Quanto os dois gastaram?
b) O troco que Leonardo recebeu, se ele pagou os seus sorvetes com 10x reais.

4) Se Jussara tem 20x reais e resolveu dar a quarta parte desse dinheiro para seu filho, que quantia seu filho receberá?

5) Qual é a forma mais simples de representar as expressões abaixo?

a) $-7xy + 2xy =$
b) $15mn – 8mn =$
c) $2,5ab – 0,5ab =$
d) $–3a^2b^2 - a^2b^2 =$
e) $y^2 + 6y^2 - 2y^2 =$
f) $4ax^2 - 3ax^2 + 9ax^2 =$

6) Observe a figura abaixo e determine o monômio que representa:



a) a área da figura

c) a metade dessa área
c) a terça parte dessa área
d) o perímetro da figura
e) a quarta parte do perímetro da figura.

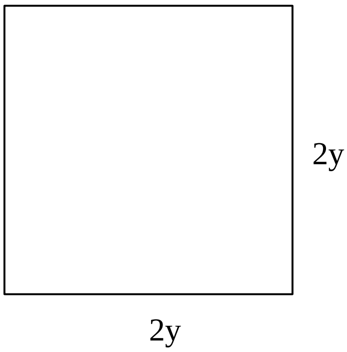
7) Qual é o resultado de:

a) $(15xy^2) : (3x)$?
b) $(-20x^2y) : (4y)$?
c) $(81a^4b^2c) : (-9ab)$?
d) $(-49a^3b^2c) : (7a^2bc)$?
e) $(-48x^4y^3) : (-12x^4y^2)$?
f) $(35x^2y^2) : (-5x^2y^2)$?

Situação - 5

POTENCIAÇÃO DE MONÔMIOS

Dona Emília resolveu colocar na sua sala um tapete com as dimensões abaixo:



Ela quer saber a área desse tapete.

Como o tapete tem a forma de um quadrado, basta fazer o cálculo da área do quadrado que é:
$A = \ell^2$

Como o valor do lado é 2y
$A = (2y)^2$

Resolvendo

$$\mathbf{A = (2y)^2 = \underbrace{(2y) . (2y)}_{\text{Definição de potência}} = \underbrace{(2^1 . 2^1) . (y^1 . y^1)}_{\text{Definição de potência de mesma base}} = 2^{1+1} . y^{1+1} = 2^2 . y^2 = 4y^2}$$

Que também pode ser resolvido, elevando-se o coeficiente e a parte literal que compõe a base ao expoente da potência.

$$A = (2^1y^1)^2 = \underbrace{2^2 \cdot y^2}_{\textit{Propriedade de potência}} = 4y^2$$

Um outro exemplo:

$$\mathbf{(3x^4)^3 = (3x^4) \cdot (3x^4) \cdot (3x^4) = 3^1 \cdot 3^1 \cdot 3^1 \cdot x^4 \cdot x^4 \cdot x^4 = 3^3 \cdot x^{12} = 27x^{12}.}$$

ou

$$(3^1x^4)^3 = 3^{1.3} \cdot x^{4.3} = 3^3 \cdot x^{12} = 27x^{12}$$

$$\boxed{\textbf{\textit{O que fizemos nada mais é que potenciação de monômios.}}}$$

Situação - 6

RADIAÇÃO DE MONÔMIOS.

Você já sabe que a operação inversa da potenciação é a radiciação. Então, para extrairmos a raiz de um monômio fazemos a operação inversa:

$$\sqrt{4y^2} = \sqrt[2]{2^2y^2} = 2^{\frac{2}{2}} \cdot y^{\frac{2}{2}} = 2^1 \cdot y^1 = 2y$$

Generalizando, temos:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

e

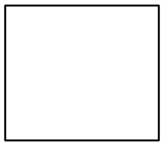
$$\sqrt[n]{ab} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$$

Portanto, repetimos a base e dividimos o expoente do radical pelo índice da raiz.

ATIVIDADE - IV

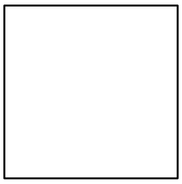
1) Lembrando que a área do quadrado é dada por $A = \ell^2$, calcule o volume dos cubos abaixo:

a)



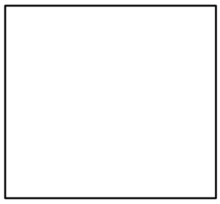
2a

b)



5m

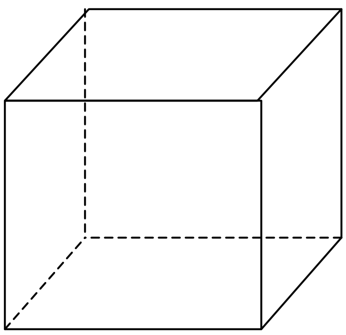
c)



8y

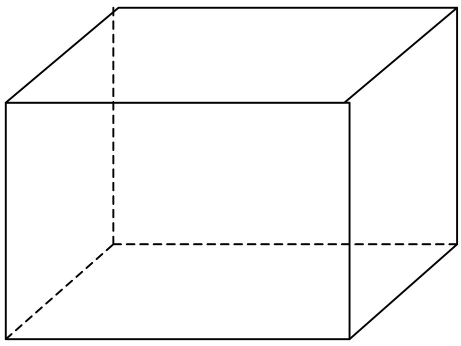
2) Lembrando que o volume do cubo é dado por $V = a^3$, calcule o volume dos cubos abaixo:

a)



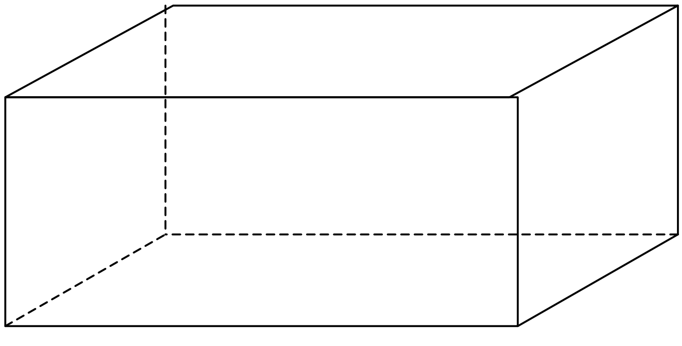
3x

b)



4a

c)



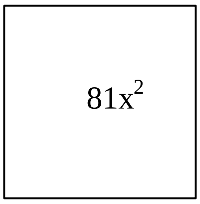
9n

3) Suponha que um quadrado tem área igual a $9y^2$. Qual é a medida do lado desse quadrado?

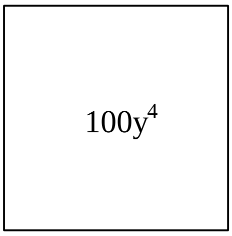
4) A sala da casa de Lucimar tem 16 m^2 de área. Qual é a medida do lado dessa sala?

5) Encontre a medida do lado dos quadrados abaixo:

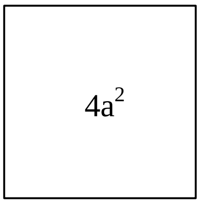
a)



b)



c)



6) Dê o resultado de:

a) $(-2x)^2 =$

b) $(3a^2)^3 =$

c) $(a^2b^3c)^2 =$

d) $(-m^2n^3)^2 =$

e) $(4abx)^3 =$

f) $\sqrt{64m^2} =$

g) $\sqrt{100a^4b^{10}} =$

h) $\sqrt{\frac{4}{9}x^6y^8} =$

i) $\sqrt{\frac{25}{49}a^2x^4} =$

2 – OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

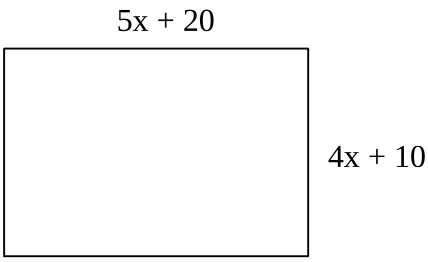
Leia o texto, procure compreendê-lo, para resolver as situações a seguir:

Situação – 1

ADIÇÃO DE POLINÔMIOS

O presidente do Bragantino precisa cercar o campo e quer saber quantos metros de alambrado terá que comprar, sendo o comprimento desse campo de futebol $5x + 20$ e a largura $4x + 10$.

Vamos ajudá-lo. Como você já sabe ele precisa calcular perímetro desse campo que tem a forma de um retângulo, então:



$$(5x + 20) + (5x + 20) + (4x + 10) + (4x + 10) =$$
$$= 5x + 20 + 5x + 20 + 4x + 10 + 4x + 10 =$$
$$= (5 + 5 + 4 + 4)x + 20 + 20 + 10 + 10 =$$
$$= 18x + 60$$

Juntaram-se os monômios que têm a mesma parte literal. O que você fez foi **adição de polinômios.** Quando se juntam os monômios que têm a mesma parte literal, está se reduzindo os termos semelhantes.

Situação – 2

MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS

E depois ele necessita gramar o campo de futebol. Para isso, você sabe, é só calcular a área. Assim:

$$(5x + 20) \;.\; (4x + 10) = 5x \;.\; 4x + 5x \;.\; 10 + 20 \;.\; 4x + 20 \;.\; 10$$

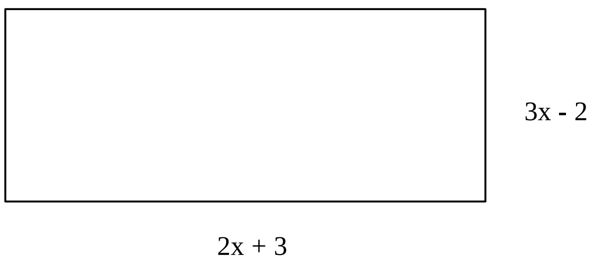
$$= 20x^2 + 50x + 80x + 200 = 20x^2 + 130x + 200$$

Multiplicou-se cada monômio do primeiro polinômio por todos os monômios do segundo e reduziu-se os termos semelhantes. Isso é **multiplicação de polinômios.**

ATIVIDADE - V

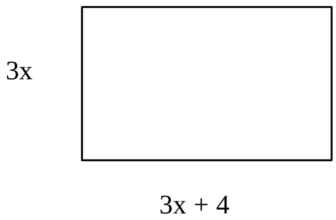
1) Branco, comprou 5 calças e 12 camisas. Se cada calça custou x reais e cada camisa y reais, qual o polinômio que representa a quantia que Branco gastou?

2) Na concentração do Corinthians cada jogador tem um quarto, representado pela figura abaixo. Qual o polinômio que representa a área de cada quarto?

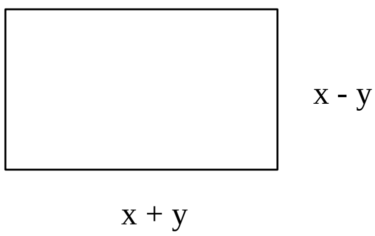


3) Calcule a área das figuras abaixo e resolva as expressões algébricas (polinômios) obtidas.

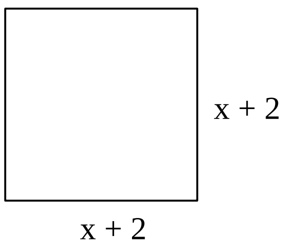
a)



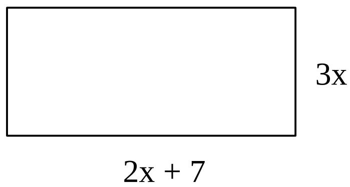
b)



c)



d)



4) Calcule:

a) $(x + y)^2 =$
b) $(x - y)^2 =$
c) $(x + 4)(x - 4) =$
d) $(x + 3)^2 =$
e) $(y-7)^2 =$
f) $(m + n)(m - n) =$

U N I D A D E 3
EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

Vamos estudar algumas situações problema que podem ser resolvidas usando equações para facilitar os cálculos.

Situação - 1

Paulo comprou um televisor e uma lavadora. Pagou pelos dois juntos 572 reais. Sabe-se que o preço do televisor é o triplo do preço da lavadora. Ele quer calcular o preço de cada um. Vamos ajudá-lo.

Neste problema temos que encontrar dois números que representam o preço da lavadora e o preço do televisor.

Um dos caminhos é pela **aritmética:**

Veja: o preço do televisor é três vezes o preço da lavadora, isso significa que 572 deve ser repartido em 4 partes iguais, sendo três delas o preço do televisor e uma, o preço da lavadora.

Assim: $572 \div 4 = 143$ (preço da lavadora)
$3 \times 143 = 429$ (preço do televisor)

Como você notou problemas como este tornam-se difíceis de serem resolvidos pela aritmética ou de "cabeça". Para facilitar, vamos resolvê-lo por outro caminho, usando letras.

Como o preço do televisor é o triplo do preço da lavadora, vamos indicar o preço da lavadora por x e o preço do televisor por 3x (triplo significa três vezes).

Então, podemos escrever $x + 3x = 572$ é chamada de **equação**.

Equação é toda sentença matemática que representa uma igualdade e na qual existe uma ou mais letras que indicam um número desconhecido.

A letra que indica o número desconhecido, chama-se incógnita. Na equação anterior a incógnita é x.

Numa equação, a expressão que vem à esquerda do sinal de igual é chamada de **1º membro** e a direita, de **2º membro.**

$$\underbrace{\mathbf{x + 3x}}_{\text{1º membro}} \quad = \quad \underbrace{\mathbf{572}}_{\text{2º membro}}$$

Vamos agora encontrar o valor de x.

$$x + 3x = 572$$
$$4x = 572$$

Dividindo cada membro da equação 4x = 572 pelo coeficiente da incógnita que é 4. Obteremos uma equação equivalente a 4x = 572.

Assim:

$$\frac{4x}{4} = \frac{572}{4} \Rightarrow x = 143$$

Processo prático:

$$x + 3x = 572$$
$$4x = 572$$

⇒ quatro "passa" para o 2º membro, invertendo a operação: de multiplicação para divisão.

$$x = \frac{572}{4}$$
$$x = 143$$

Como x está indicando o preço da lavadora podemos dizer que seu preço é 143 reais.

Vamos, agora, encontrar o preço do televisor, que é o triplo do preço da lavadora.

Assim: $3x \Rightarrow 3 \,.\, 143 = 429$

O preço do televisor é 429 reais para verificarmos se esses valores estão corretos, devemos proceder da seguinte maneira:

Na equação, substituímos a incógnita pelo número encontrado, o qual deverá satisfazer a igualdade.

Assim:

$$x + 3x = 572$$
$$143 + 3 \,.\, 143 = 572$$
$$143 + 429 = 572$$
$$572 = 572$$

Situação – 2

Uma calça custa 9 reais a mais que uma camisa. O preço das duas peças juntas é 53 reais. Qual é o preço de cada uma?

Para equacionar esse problema, vamos procurar entender o enunciado.

Observe que o preço da camisa é menor que o preço da calça, então podemos indicar esse preço por x. E o preço da calça é nove reais a mais que o preço da camisa, então podemos indicar esse preço por **x + 9.**

Com esses dados, você pode escrever a equação que representa o problema. Escreva-a ....

Se você escreveu a equação x + x + 9 = 53, acertou. Vamos agora encontrar o valor de x.

$$x + x + 9 = 53$$
$$2x + 9 = 53$$

Subtraindo 9 unidades de cada membro, obteremos a equação 2x = 44, equivalente a 2x + 9 = 53

Assim: $2x + 9 – 9 = 53 - 9$

$2x = 44$

Dividindo cada membro da equação pelo coeficiente da incógnita (2), temos:

$$\frac{2x}{2} = \frac{44}{2}$$
$$x = 22$$

Processo prático:

Devemos "isolar" no 1º membro, os termos que apresentam a incógnita x, no 2º membro, os que não apresentam a incógnita x.

$x + x + 9 = 53$

$x + x = 53 – 9 \Rightarrow$ nove "passa" para o 2º membro, invertendo a operação: de adição para subtração.

$2x = 44$

$x = \frac{44}{2} \quad \Rightarrow$ dois "passa" para o 2º membro, invertendo a operação: de multiplicação para divisão.

$x = 22$

Como x está indicado o preço da camisa podemos dizer que seu preço é equivalente a que valor?

Agora, determine o preço da calça, sabendo que é 9 reais a mais que o preço da camisa.

Situação – 3

Numa classe de 35 alunos o número de meninas é $\frac{2}{3}$ do número de meninos. Calcule o número de meninas e meninos dessa classe.

Com a análise dos dados do problema, podemos indicar
O número de meninos por...
O número de meninas por...
A equação do problema por..

Se você escreveu a equação x + $\frac{2x}{3} = 35$

$\frac{3x}{3} + \frac{2x}{3} = \frac{105}{3}$ $\Rightarrow$ reduzimos ao mesmo denominador.

3x + 2x = 105 $\Rightarrow$ cancelamos os denominadores.

5x = 105 $\Rightarrow$ efetuamos os cálculos algébricos.

$x = \frac{105}{5}$ $\Rightarrow$ cinco "passa" para o 2º membro invertendo a operação: de multiplicação para divisão.

x = 21

Logo, o número de meninas representam $\frac{2}{3}$ do número de meninos, calcule o número de meninas.

Observe a resolução de algumas equações do 1º grau pelo processo prático:

a) 4 (x – 4) – 1 = 3 (2x – 7)
4x – 16 – 1 = 6x - 21
4x – 17 = 6x – 21
4x – 6x = - 21 + 17
- 2x = - 4 $\Rightarrow$ multiplicamos por (-1) do dois membros.
$x = \frac{4}{2}$
x = 2

b) $\frac{x}{3} - \frac{(1-x)}{2} = 1$

$\frac{2(x)}{6} - \frac{3(1-x)}{6} = \frac{6(1)}{6}$ $\Rightarrow$ reduzimos todos os termos ao menor denominador comum (m.m.c.)

$\frac{2x}{6} - \frac{3(1-x)}{6} = \frac{6}{6}$ $\Rightarrow$ eliminamos os denominadores.

$2x - 3(1 - x) = 6$

$2x - 3 + 3x = 6$

$5x = 6 + 3$

$5x = 9$

$x = \frac{9}{5}$

ATIVIDADE - VI

1) Resolva as equações:

a) $7x = 24 - 5x$

b) $10x - 11 = 12x + 21$

c) $4x - 4 = 0$

d) $3(x - 2) - 2(x + 3) = 8$

e) $\frac{x}{3} + \frac{(x+2)}{2} = 3$

f) $13x - 16 = 14 - 17x$

g) $\frac{2x}{4} - 4 = 6$

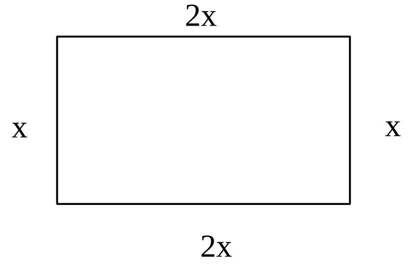
h) $\frac{x}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

i) $0{,}4x + 0{,}5x = 0{,}27$

j) $3 - \frac{(x+3)}{2} + \frac{x-1}{3} = x$

2) Determine a medida dos lados de cada figura.

a) retângulo de perímetro 18 cm:



b) triângulo equilátero de perímetro 21 cm:

c) quadrado de perímetro 22 cm:

3) O dobro de um número somado com seu triplo dá como resultado 45. Que número é esse?

4) Dona Lígia vai construir em sua fazenda, uma horta de forma retangular. Ela quer que a largura dessa horta seja a metade do comprimento e que o perímetro seja de 48 m. Quais as medidas da horta de D. Lígia?

5) Seu João tem uma quantia de bois no pasto. Pedro tem o dobro dos bois de seu João. Quantos bois tem cada um se ambos têm juntos 372 bois?

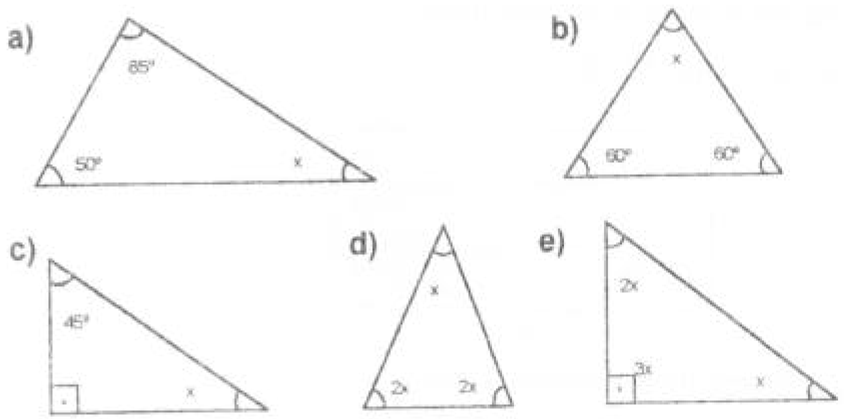
6) Uma mãe quer repartir 25 balas entre seus filhos, Pedro e André. Quantas balas receberá cada um se Pedro receber o mesmo tanto que André mais 5 balas?

7) Um caderno custa a terça parte do preço de uma apostila. Os dois juntos custam R$12,00. Qual é o preço de cada um?

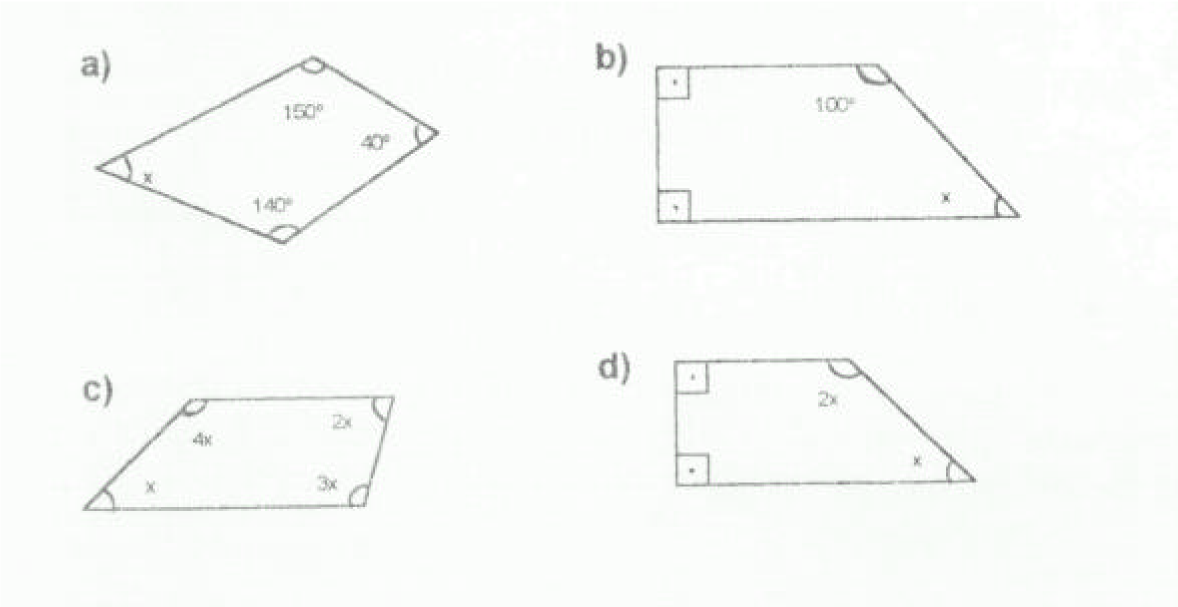
8) Adriano compro um tablete de chocolate de 200 gramas, mais 3 tabletes de chocolate branco que juntos pesaram 650 gramas. Quantos gramas tem cada tablete de chocolate branco?

9) Paulo tem uma certa quantia na poupança e sua irmã Rosa tem o triplo dessa quantia. Os dois junto têm R$ 160,00. Quanto tem Paulo e quanto tem Rosa?

10) Lembrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, calcule a medida em graus dos ângulos desconhecidos, sem usar o transferidor.



11) Sabendo que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º. Determine as medidas em graus dos ângulos desconhecidos, sem usar o transferidor:



U N I D A D E 4
SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Considere a situação:

Tenho 220 reais e quero comprar 8 peças de roupas entre camisetas e bermudas. O preço de cada camiseta é vinte e de cada bermuda é quarenta reais. Quantas camisetas e quantas bermudas posso comprar, usando todo o meu dinheiro?

Usando a aritmética ou pelo cálculo mental tente resolver este problema.

Para facilitar a resolução desse problema podemos utilizar equações do 1º grau com duas incógnitas. Assim, vamos indicar o número de camisetas por x e o número de bermudas por y. Como quero comprar 8 peças de roupas, podemos dizer que x + y = 8.

O preço de cada camiseta é vinte reais e de cada bermuda é quarenta reais. Como indicamos as camisetas por x e as bermudas por y, podemos dizer que o preço das camisetas é 20x e que o preço das bermudas é 40y. Então $20x + 40y = 220$, pois tenho 220 reais para a compra.

Com os dados do problema, montamos duas equações: $x + y = 8$ e $20x + 40y = 220$. Nesse caso, dizemos que as equações formam um **sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas** e devem ser escritas na forma

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 20x + 40y = 220 \end{cases}$$

Para resolver esse sistema temos que encontrar os valores de x e de y que é solução tanto da primeira equação como da segunda.

Para resolver um sistema de duas equações é preciso chegar a uma só equação com uma só incógnita e para isso existem vários métodos.

Vamos resolvê-lo usando o **método da adição.**

Por esse método é necessário que o sistema tenha termos opostos.

No sistema, não há termos opostos, mas temos que descobrir uma maneira de obter termos opostos para fazer "desaparecer" uma das incógnitas.

Vamos multiplicar todos os termos da 1ª equação por (-20), assim:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 20x + 40y = 220 \end{cases} \qquad \begin{cases} -20x - 20y = -160 \\ 20x + 40y = 220 \end{cases}$$

Agora, que temos opostos –20 e 20x, vamos somar membro a membro as duas equações.

$$\begin{array}{r} -20x - 20y = -160 \\ \underline{20x + 40y = 220} \\ 0 + 20y = 60 \end{array}$$

Como -20x + 20x = 0, a incógnita "x" desaparece

$$y = \frac{60}{20}$$

$$y = 3$$

Para descobrir o valor de x é só subtrair o valor de y numa das equações do sistema:

$$x + y = 8$$
$$x + 3 = 8$$
$$x = 8 - 3$$
$$x = 5$$

Como indicamos por x o número de camisetas e por y o número de bermudas, podemos dizer que posso comprar 5 camisetas e 3 bermudas.

Verificação:

Para verificar se esses valores estão corretos, devemos substituir as incógnitas das duas equações pelos seus valores encontrados (5, 3) que deverão satisfazer as igualdades.

Assim:

1ª equação: $x + y = 8 \Rightarrow 5 + 3 = 8 \Rightarrow 8 = 8$

2ª equação: $20x + 40y = 220 \Rightarrow 20 . 5 + 40 . 3 = 220 \Rightarrow$

$100 + 120 = 220 \Rightarrow 220 = 200$

O par ordenado (5, 3) que satisfaz as duas equações ao mesmo tempo é chamado solução do sistema.

Você já sabe que o gráfico de uma equação do 1º grau com duas variáveis é sempre uma reta. Vamos, agora, representar graficamente as equações $x + y = 8$ e $20x + 40y = 220$, num mesmo plano cartesiano.

1ª equação: x + y = 8

x	y	**X + y = 8**
1	7	1 + y = 8
3	5	3 + y = 8

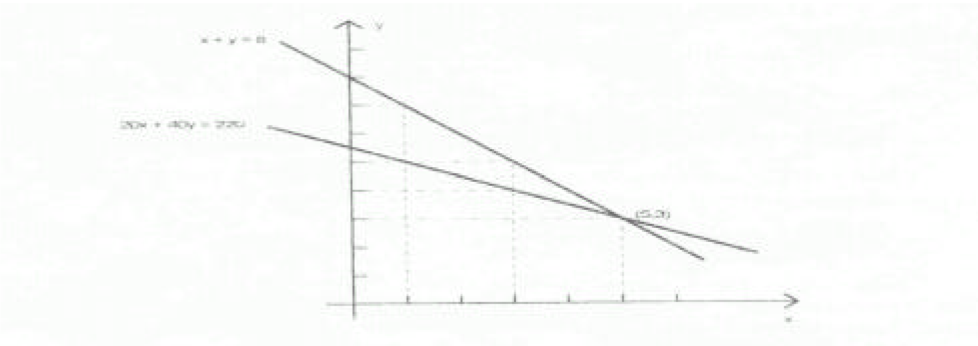
y = 8 – 1 = 7
y = 8 – 3 = 5

2ª equação: 20x + 40y = 220

x	y	**20x + 40y = 220**
1	5	20 . 1 + 40y = 220
3	4	20 . 3 + 40y = 220

40y = 220 – 20 $\Rightarrow$ $y = \frac{200}{40}$ $\Rightarrow$ y = 5

40y = 220 – 60 $\Rightarrow$ $y = \frac{160}{40}$ $\Rightarrow$ y = 4



Observe as duas retas e responda:

Qual é o ponto comum das duas retas?..

Compare esse ponto com a solução do sistema. O que você observa?

Comente sua conclusão com seus colegas e o seu professor.

Vamos agora resolver o mesmo sistema de equações usando o **método da substituição.**

Nesse método, "isolamos" uma das letras em qualquer uma das equações.

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 20x + 40y = 220 \end{cases}$$

Vamos "isolar" o x na 1ª equação:

$$x + y = 8 \Rightarrow x = 8 - y$$

Agora, vamos substituir o valor de x na 2ª equação:

$20x + 40y = 220$
$20(8 - y) + 40y = 220$ (equação de 1º grau na incógnita y)

Basta resolver a equação!

$20(8 - y) + 40y = 220$
$160 - 20y + 40y = 220$
$20y = 220 - 160$
$20y = 60$
$y = \frac{60}{20}$
$y = 3$

Já encontramos o valor de y. Note que no início da resolução já tínhamos concluído que:

$x = 8 - y$

Então, para obter x, basta substituir y por 3.

Assim:

$x = 8 - y$
$x = 8 - 3$
$x = 5$

A solução é o par ordenado (5, 3).

ATIVIDADE - VII

1) Um sorvete de chocolate custa x e um sorvete de limão custa y. Ana comprou um sorvete de chocolate e um de limão pagando R$0,90. Maria comprou dois sorvetes de chocolates e três de limão pagando R$2,20. Qual é o preço de cada sorvete?

2) A soma das idades de dois irmãos é 25 anos. Um é mais novo que o outro 5 anos. Determine suas idades.

3) O perímetro de um retângulo é 40 cm. O comprimento é igual ao triplo da largura. Quais são as dimensões desse retângulo?

4) Quais são os dois números cuja soma é 38 e cuja diferença é 8?

5) A soma das idades de dois irmãos é 21 anos. A idade do mais velho é o dobro da do mais novo. Qual é a idade de cada um?

6) Numa sala de aula há 36 alunos entre meninos e meninas. Sabendo que existem 6 meninos a mais que meninas, calcule o número de meninos e meninas.

7) Um aluno ganha 5 pontos por exercício que acerta e perde 3 por exercício que erra. Ao fim de 50 exercícios tinha 210 pontos. Determine quantos exercícios ele acertou.

8) Uma senhora comprou 4 abacates e 3 melões por R$7,20. Se tivesse comprado 3 abacates e 4 melões, teria pago R$8,90. Qual o preço de cada fruta?

9) Em um pátio existem carros e bicicletas num total de 30 veículos e 86 rodas. Quantos veículos de cada espécie existem nesse pátio?

10)Uma pessoa paga uma conta de R$108,00 com 32 cédulas, umas de R$1,00 e outras de R$5,00. Quantas cédulas há de cada espécie?

11)Resolva os sistemas algébricamente:

a) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = -9 \\ x - 3y = 11 \end{cases}$

U N I D A D E 5

TEOREMA DE PITÁGORAS

Como você deve saber, antes de fazer uma construção é necessário planejá-la. Esse planejamento é feito através de um modelo esboçado no papel. A esse modelo damos o nome de **planta baixa.**

Todos os cálculos da construção de uma casa, de um prédio, de um viaduto, dentre outras, são feitas tendo como base os dados contidos numa planta, que tem como referência as formas e dimensões da realidade.

Vamos verificar, num exemplo, como isso ocorre.

Observe a planta baixa que seu Nilo fez para construir a casa de seu filho:

A planta está na escala de 1:100. Mas o que significa 1:100?

Essa notação significa que a planta foi desenhada na escala 1 por 100, ou seja, para cada 1 cm desenhado no papel, corresponde a 100 cm ou a 1 m, na realidade.

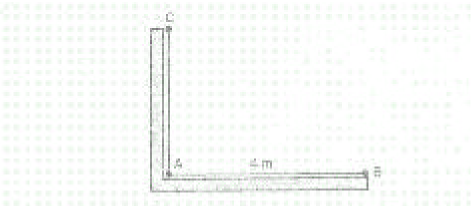
Vamos estudar agora, uma outra questão referente as construções de maneira geral.

Voltando a observar a planta do quarto 2, cujas dimensões, na realidade, são 4 m de comprimento por 3 m de largura.

O problema é saber se as paredes construídas "estão ou não no esquadro", ou se os "cantos" formam um **ângulo de 90º.**

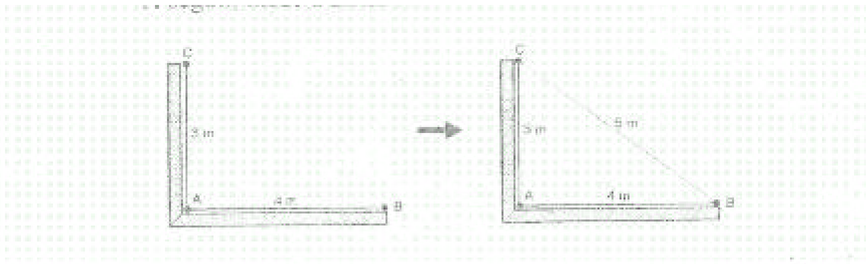
Esse problema é muito comum para os trabalhadores da construção civil, que têm uma maneira própria para resolvê-lo.

Vamos supor que o pedreiro de seu Nilo vai examinar se as paredes do quarto 2, da casa de seu filho, foram construídas no esquadro. Para isso, ele estica um fio entre duas estacas cravadas no chão, junto ao comprimento ou a largura das paredes do quarto; no caso, no comprimento. Observe, na figura abaixo, que o fio que liga as pontas A e B têm a mesma medida do comprimento da parede, 4m.



Usando sua experiência, o pedreiro deverá cravar a 3 ª estaca num ponto “C” de modo que “AC” fique perpendicular a “AB”. No caso, a distância entre as estacas situadas nos pontos A e C deverão ter uma distância equivalente a 3 m (largura do quarto). A estaca “C” é provisória.

A seguir, mede a distância “BC”.



Se essa medida for equivalente a 5 m, ele garante que a parede está no esquadro, se não, movimentará a estaca “C” até dar 5 m.

Você sabe porque o pedreiro forma, com as estacas, um triângulo retângulo de lados 3m, 4m e 5m para saber se as paredes estão ou não no esquadro?

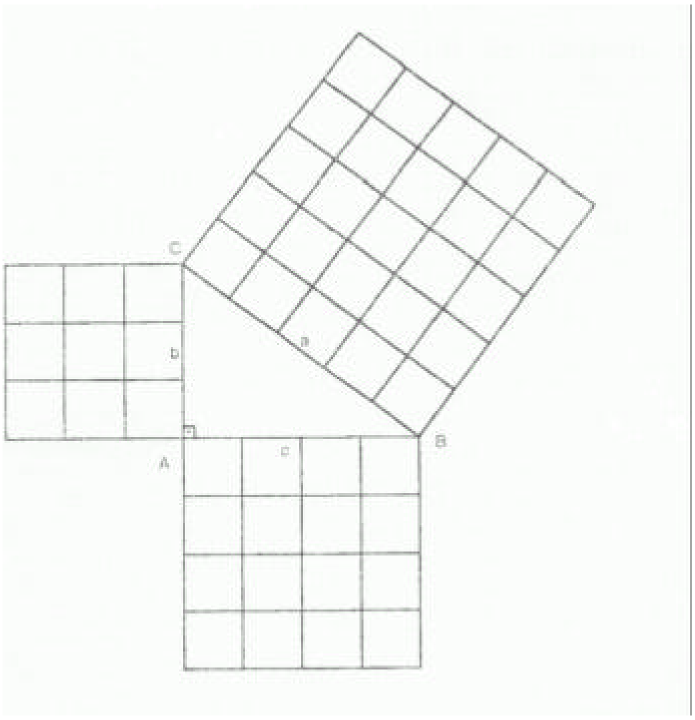
Esse conhecimento vem de muitos milênios atrás, quando no antigo Egito costumava-se medir as Terras a beira do rio Nilo, onde havia as plantações e, a cada enchente, as marcas deixadas pelos agrimensores eram carregadas pelas águas, necessitando, portanto, de novas remarcações.

Os Hindus, também na mesma época, construíam o ângulo reto de modo semelhante, porém utilizavam outras medidas.

O matemático e filósofo grego Pitágoras, fundou a Sociedade chamada Ordem dos Pitagóricos, onde com seus discípulos descobriu a relação existente entre as medidas dos lados de qualquer triângulo retângulo.

Se um triângulo tem os lados medindo: 3; 4 e 5, ou 6; 8 e 10, ou 9; 12 e 15 ou qualquer triângulo com lados proporcionais a 3; 4 e 5 é um **triângulo retângulo.**

Observe:



Considere o triângulo retângulo ABC acima. Os lados que formam o ângulo reto são denominados **catetos (b e c)** e o lado oposto ao ângulo reto é denominado **hipotenusa (a).**

A medida da hipotenusa mantém uma relação com as medidas dos catetos. Essa relação mostra uma das propriedades mais importantes da Matemática.

"A área de um quadrado traçado sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados traçados a partir dos catetos, ou seja, 25 ua + 16 ua (ua) ⇒ unidades de área."

Essa propriedade é conhecida como **Teorema de Pitágoras,** e, para facilitar os cálculos pode ser designada:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

O quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos

Por exemplo

O triângulo utilizado pelos pedreiros de lados 3,4,5:

$$A^2=b^2 + c^2$$
$$5^2 = 3^2 + 4^2$$
$$25 = 9 + 16$$
$$25 = 25$$

Observe que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Dissemos que, as medidas dos lados de um triângulo, em uma dada unidade, são: 3, 4 e 5 ou 6, 8 e 10 ou 9, 12 15 ou 12, 16 e 20 ou ..., ele é um triângulo retângulo. Verifique se em todos eles é verdade que: o quadrado da medida do maior lado é igual á soma dos quadrados das medidas dos lados menores.

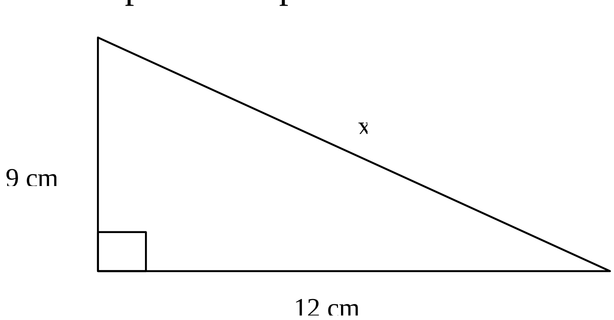
Se você pegou as medidas: 6, 8 e 10, o lado maior é a hipotenusa (10) e os lados menores (6 e 8) são os catetos.

Se você fez

$10^2 = 6^2 + 8^2$
$100 = 36 + 64$
$100 = 100$ a igualdade foi comprovada. Então, os valores 6, 8 10 realmente são medidas de um triângulo retângulo.

Situação - 1

No triângulo retângulo abaixo, são dadas as medidas dos catetos. Encontre a medida x que corresponde a hipotenusa.



Fazendo os cálculos, você deve ter chegado à relação $x^2 = 225$ (essa é uma equação de 2º grau).

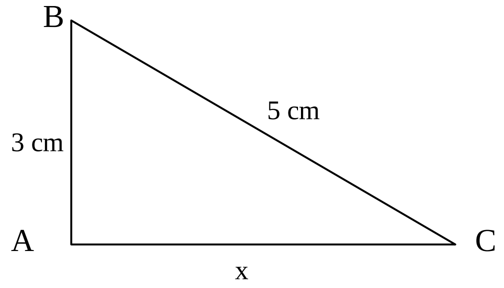
Como fazer para achar "*x*"?

Lembre-se de que a operação inversa da potenciação é a radiciação. Se $x^2 = 225$, então, $x = \sqrt{225}$ $x = 15$.

Logo, a medida da hipotenusa é 15 cm.

Situação – 2

Observe o triângulo retângulo abaixo:



Qual é a medida do cateto maior?

$5^2 = 3^2 + x^2$ (chegamos outra vez em uma equação de 2º grau.)

$25 = 9 + x$

$x = 25 - 9$

$x^2 = 16$

$x = \sqrt{16}$

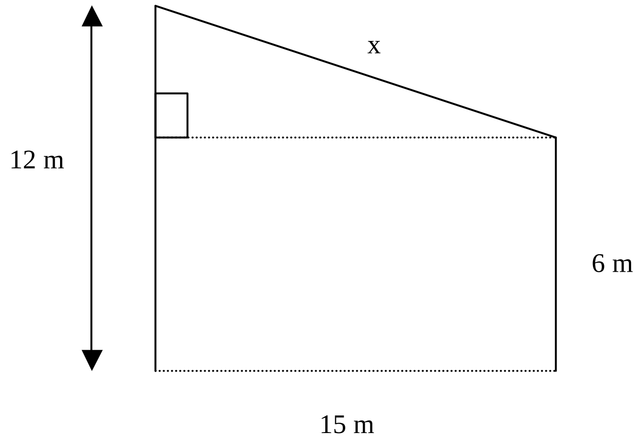
$x = 4$

Logo, a medida do cateto maior é 4 cm.

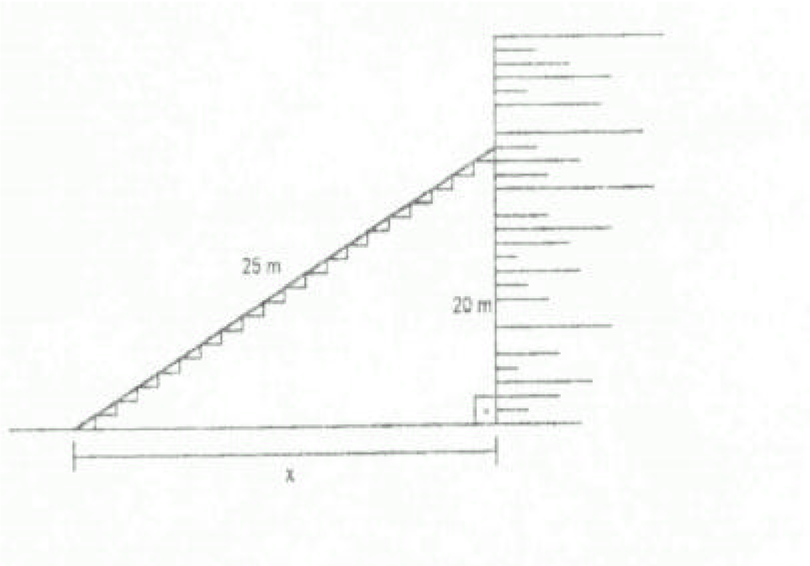
ATIVIDADE – VII

1)Os catetos de um triângulo retângulo medem 5 cm e 12 cm. Qual é a medida da hipotenusa?

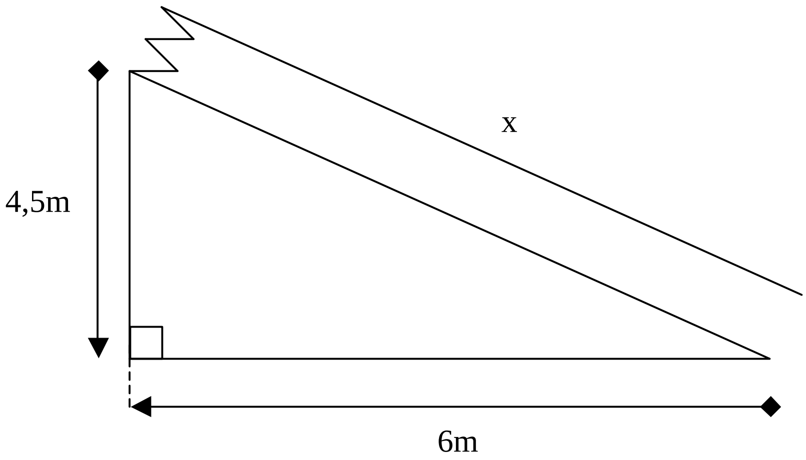
2)A figura mostra que a distância entre dois postes é de 15 cm. As alturas destes postes são respectivamente 6m e 12 m. Qual deverá ser o comprimento do cabo que une as extremidades superiores destes postes?



3) Uma escada está apoiada numa parede a 20m do chão, como mostra a figura. Sabendo que a escada tem 25 m de comprimento, qual é a distância do início da escada até a parede ao nível do chão?



4) Devido a um temporal, um pé de eucalipto é quebra de modo tal que sua parte mais alta toca o solo. Sabe-se que a distância entre o tronco do eucaliptos e a parte que tocou o solo é de 6 m e a parte que ficou fixa no solo tem 4,5 m. Qual era a altura desses eucalipto antes de ter-se quebrado?



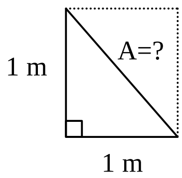
UNIDADE 6

CONJUNTOS NUMÉRICOS

NÚMEROS IRRACIONAIS

Os números inteiros exerciam grande fascínio sobre Pitágoras e seus discípulos.

Ao resolver um problema, sobre diagonal, fizeram uma descoberta importante. Construíram um triângulo retângulo cuja medida da hipotenusa não conseguiam descobrir



Utilizando nossos conhecimentos sobre triângulos, podemos escrever:

$$A^2 = 1^2 + 1^2$$
$$A^2 = 2$$

Você conhece um número inteiro ou fracionário que elevado ao quadrado dê 2?

Não1

Então, $\sqrt{2}$ não é um número inteiro e nem racional.

Pitágoras, que só acreditava na existência dos números naturais e dos números racionais positivos, nunca encontrou um número cujo quadrado desse 2.

Só muito mais tarde é que outros matemáticos provaram que não existe número racional cujo quadrado é 2.

Esse número pertence ao conjunto de **números irracionais**

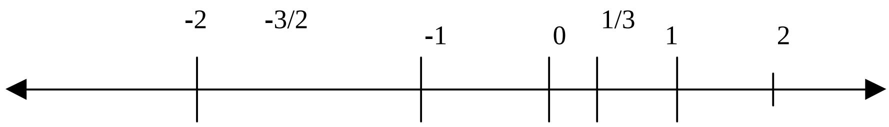
Os números irracionais têm representação decimal infinita e não periódica, não podendo ser escrito sob forma a/b.

Podemos representar $\sqrt{2}$ por:

$$\sqrt{2} \cong 1,4$$
$$\sqrt{2} \cong 1,41$$
$$\sqrt{2} \cong 1,414$$
$$\sqrt{2} \cong 1,414213$$

Para utilizarmos o número irracional em cálculos, podemos fazer por aproximação com uma, duas , três ou mais casas decimais.

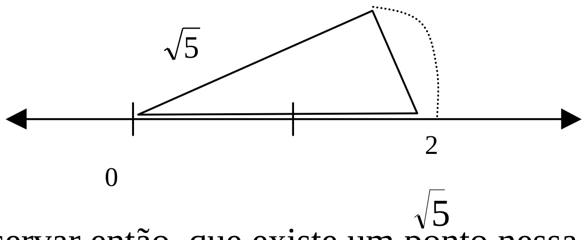
Quando vamos representar na reta um número inteiro ou fracionário, não temos dificuldade. Por exemplo:



Agora vamos localizar na reta um número irracional na reta, por exemplo, $\sqrt{5}$. Um caminho pode ser este:

Desenhamos um triângulo retângulo, de maneira que o lado que mede 2 unidades de comprimento fique sobre a reta. A seguir, transportamos o maior lado para essa reta.

Logo, a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 2 e 1 é $\sqrt{5}$.



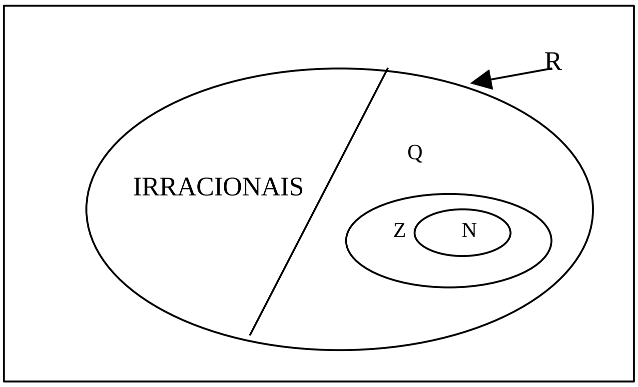
Podemos observar então, que existe um ponto nessa reta que representa o número irracional $\sqrt{5}$.

Um número irracional importante foi encontrado nos estudos sobre círculos e circunferências: o número *p* (pi). *p* eqüivale a, aproximadamente 3,14...

OS COJUNTOS NUMÉRICOS

N = { O, 1, 2, 3, 4, ...} $\rightarrow$ Conjunto dos números naturais
Z = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...} $\rightarrow$ conjunto de números inteiros
Q = {..., -1, -0,5, ...,0, ½, ..., 1, ...$\rightarrow$ conjunto de números racionais.
I = {..., $-\sqrt{2}$, ..., $\sqrt{\frac{4}{5}}$, $\sqrt{2}$, ...p , ...} $\rightarrow$ Conjunto de números irracionais
R= {..., -1, ...-0,5, ...0, ½, ... $\sqrt{2}$, ... 3,1415, ... $\sqrt{10}$ $\rightarrow$ conjunto dos números reais.

Podemos fazer a representação desses conjuntos, assim:



Portanto, o conjunto de números reais é dado pela união dos números racionais com os irracionais. Assim: R = QUI

ATIVIDADE – IX

1) Trace uma reta e localize os números:

$\frac{1}{3}$, -$\frac{2}{5}$, $\frac{17}{4}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

2) identifique como racionais (Q) e como irracionais (I) os seguintes números:

a) $\frac{1}{4}$ ( )
b) $\frac{2}{3}$ ( )
c) 1, 4142135 ( )
d) $\sqrt{144}$ ( )
e) 1,86612071... ( )
f) 6,78242424 ( )
g) 3,141592... ( )
h) $\sqrt{2}$ ( )

U N I D A D E 7
POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

1 - POTENCIAÇÃO

Vamos supor a seguinte situação:

Vera e Leoni fizeram uma aposta.

Em cinco disputas de "jogo da velha", aquela que perdesse, teria que pagar balas nas condições estabelecidas pelas partes interessadas.

Condições:

Uma bala pela primeira casa do tabuleiro do "Jogo da Velha, duas balas pela segunda casa, 4 balas pela terceira casa, e assim, sucessivamente até completar as 9 casas do tabuleiro.

Observe abaixo, a representação do tabuleiro do "jogo da Velha":

Vamos escrever essas condições:

1ª casa = 1 bala = 1
2ª casa = 2 balas = 2
3ª casa = 2.2 balas = 4
4ª casa = 2.2.2 balas = 8

Usando a lógica continue:

5ª casa =
6ª casa =
7ª casa =
8ª casa =
9ª casa =

Se somarmos todas as balas, quantas balas a vendedora receberá?

Na 5ª casa você escreveu: 2.2.2.2 = 16? Correto.

A escrita 2.2.2.2 pode ser simplificada em 2^4

Então: $2^4 = 16$.

Expoente

Base ← $\underbrace{2^4 = 16}_{\text{Operação Potenciação}}$ → Potência

Base → fator que se repete

Expoente → número de vezes que repete a base.

Escreva sob forma de potência:

3ª casa = 2.2=
4ª casa = 2.2.2=
5ª casa = 2.2.2.2=
6ª casa = 2.2.2.2.2=
7ª casa = 2.2.2.2.2.2=
8ª casa = 2.2.2.2.2.2.2=
9ª casa = 2.2.2.2.2.2.2.2=

Para indicar a multiplicação com fatores iguais, o homem criou a potenciação.

Vamos fazer a leitura do exercício anterior:

$2^2 \rightarrow$ Lê-se: dois elevado ao quadrado ou dois elevado a segunda potência.
$2^3 \rightarrow$ Lê-se: dois elevado ao cubo ou dois elevado à terceira potência.
$2^4 \rightarrow$ Lê-se: dois elevado a quarta potência.
Continue:

$2^5 \rightarrow$
$2^6 \rightarrow$
$2^7 \rightarrow$
$2^8 \rightarrow$
$2^9 \rightarrow$

De um modo geral, representando por um *a* um número real e por *n* um número natural, diferentes de zero, denominamos de *potência* à expressão a^n, que representa um produto de *n* fatores iguais ao número *a*.

Veja:

$$a^n = \underbrace{a.a.a. \ldots a}_{\text{“}n\text{” fatores}}$$

Na potência $\mathbf{a^n}$, **a** é a base da potência e **n** é o expoente.

Agora, vamos resolver utilizando a definição de potência.

A) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81$

B) $(\frac{1}{2})^3 = (\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}) = -\sqrt{\frac{1}{8}}$

C) $(0{,}5)^2 = (0{,}5) \cdot (0{,}5) = 0{,}25$

D) $5^1 = 5$

2 – RADICIAÇÃO

Para iniciar o estudo da radiciação, o professor Cláudio havia proposto aos seus alunos que recortassem alguns cartões de cartolina medindo 1 cm de lado.

Com esses cartões ele pediu que montassem figuras, também quadradas, com 2 cm, 3 cm e 4 cm de lado.

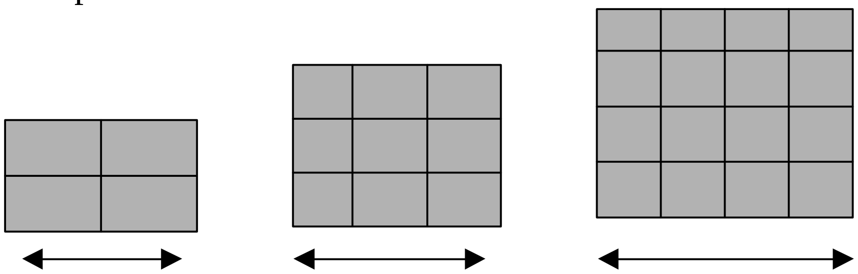
Agora, faça você!

Complete o quadro com os dados que estão faltando:

Medidas do lado do quadrado	**N.º de cartões para cada lado do quadrado**	**Total de cartões**
2 cm		
3 cm		
4 cm		

Vamos conferir!

Provavelmente, os alunos do professor Cláudio montaram as figuras começando pela base.



Observe que a montagem da figura cujo lado mede:

- 2cm, são necessários 4 cartões.
- 3 cm, são necessários 9 cartões.
- 4 cm, são necessários 16 cartões.

Existem alguma relação entre as medidas dos lados das figuras 1,2 e 3 com o número de cartões utilizados na sua montagem?

Vejamos:

Na figura1, temos 2 quadradinhos de 1cm de lado no comprimento por 2 na altura, ou 2X2 = 4.

Na figura 2, temos 3 quadradinhos no comprimento por 3 na largura, ou 3X3 = 9.

Na figura 3, temos 4 quadradinhos no comprimento por 4 na largura ou 4X4 = 16.

Fazendo a representação na forma de potenciação, temos:

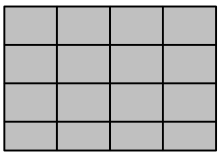
$2^2 = 2x2 = 4$
$3^2 = 3x3 = 9$
$4^2 = 4x4 = 16$

Observe que:

Os lados dos quadrados são a base da potência.
2^2 ,3^2 e 4^2 têm expoentes 2, ou seja, os números são elevados à segunda potência.
E, $2^2 = 4$ cm^2 , representa a área do quadrado de lado de medida igual a 2cm; 4^2 = 16 cm^2 representa a área do quadrado de 4 cm de lado.

Situação – 1

A sustentação de uma planta é dada pela raiz. Num muro, como na figura abaixo, a sustentação é a base, que está representada pelos 4 tijolos.



A raiz da planta do muro fazem papéis semelhantes. Simbolicamente:
4^2 = 16
4 é a **base** (é como a raiz) e o **4 elevado ao quadrado dá 16**, então podemos dizer que 4 é **a raiz quadrada de 16.**

Analogamente:
$2^2 = 4 \rightarrow$ é a raiz quadrada de 4.
$3^2 = 9 \rightarrow$ é a raiz quadrada de 9

É importante observar que quando é dada e pede-se o lado, a operação que nos dá o valor desse lado chama-se raiz quadrada da área desse quadrado.

A operação de achar a raiz é chamada radiciação.

A radiciação é a operação inversa da potenciação.

Representamos a "raiz quadrada de 16 é igual a 4", por:

$$\boxed{\sqrt{16} = 4}$$

$\sqrt{16} = 4 \rightarrow$ é a operação inversa de potenciação, porque, $\mathbf{4^2} = 4x4 = 16$, onde:

Índice do radical

radicando

Sinal da raiz $\leftarrow$ $\underbrace{\sqrt[2]{16}}_{\text{radical}} = 4 \rightarrow$ Raiz quadrada

Na indicação da raiz quadrada, podemos omitir o índice 2.

Qualquer número que resulta de um outro número racional elevado ao quadrado é chamado de **quadrado perfeito**.

Todo o número que é quadrado perfeito tem raiz quadrada exata.

Por exemplo:

$2 \rightarrow 2^2 \rightarrow 4 \Rightarrow \sqrt{4} = 2$
$3 \rightarrow 3^2 \rightarrow 9 \Rightarrow \sqrt{9} = 3$
$4 \rightarrow 4^2 \rightarrow 16 \Rightarrow \sqrt{16} = 4$

4, 9, 16 são quadrados perfeitos e as raízes são:
2, 3, 4 ...respectivamente.

Agora responda:

a) Quantos cartões de 1cm de lado deverão ser colocados como a base para construir um quadrado de 25 peças?

b) E se o quadrado fosse de 36 peças?

Situação - 2

Você já sabe que nem todos os números são quadrados perfeitos.
E será que é possível calcular a raiz quadrada desses números?
Essa raiz é um número natural?
Veja, por exemplo, como proceder para achar a $\sqrt{6}$.
A $\sqrt{6}$ está entre duas raízes exatas, $\sqrt{4}$ e $\sqrt{9}$.

Sabemos que a $\sqrt{4}$ = 2 e $\sqrt{9}$. = 3, logo a $\sqrt{6}$ é um valor maior que 2 e menor que 3, ou seja;

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{4} & \sqrt{6}\,. & \sqrt{9} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 2,\ldots & 3 \end{array}$$

Pensando na definição de raiz quadrada, procuramos um número entre 2 e 3, que elevado ao quadrado resulte um valor que mais se aproxime de 6, mas que não o ultrapasse.

Veja,

$$\begin{array}{r} 2,1 \\ \underline{2,1} \\ 42 \\ \underline{42\ \ } \\ 4,41 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2,2 \\ \underline{2,2} \\ 44 \\ \underline{44\ \ } \\ 4,84 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2,3 \\ \underline{2,3} \\ 69 \\ \underline{46\ \ } \\ 5,29 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2,4 \\ \underline{2,4} \\ 96 \\ \underline{48\ \ } \\ 5,76 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2,5 \\ \underline{2,5} \\ 125 \\ \underline{50\ \ } \\ 6,25 \end{array}$$

Portanto, a raiz quadrada de seis é aproximadamente 2,4 (por falta)

Para obtermos um resultado com maior aproximação, podemos utilizar a calculadora chegando a um resultado, com casas decimais, na ordem dos centésimos, milésimos , etc.

Na calculadora, para achar a $\sqrt{6}$, digite primeiramente o número 6 e em seguida $\sqrt{\ }$. O resultado é 2,4494897, porém as casa decimais continuam infinitamente, pois, se multiplicar 2,449897 por 2,449897 obteremos como resultado 5,9999997, provando assim que a raiz não é exata.

Então: $\sqrt{6} \cong 2{,}44 \rightarrow$ onde $\cong$ significa aproximadamente. A $\sqrt{6}$ = 2,449487...é um número irracional.

ATIVIDADE – X

1) Aplique o conceito de potência e resolva:

a) $1^3 =$
b) $0^2 =$
c) $(-5)^4 =$
d) $(\frac{1}{2})^2 =$
e) $(0{,}5)^3 =$
f) $(-\frac{2}{5})^2 =$
g) $(-1{,}1)^2 =$

2) Compare os valores e escreva qual dos dois é maior.

a)$5 \cdot 10$ e 10^5
b)2^1 e $(1{,}2)^2$
c)2^3 e 3^2
d)-1^3 e $(-1)^2$

3) A área de um quadrado é de 64 cm^2.Qual é a medida do lado desse quadrado?

4) A área de um quadrado mede 49 m^2. Qual é a medida do lado desse quadrado?

5) Faça um círculo nos números que são quadrados perfeitos.
2, 6, 8, 9, 24, 30, 36, 64, 100, 120.

6) Qual é o número natural que elevado ao quadrado dá 121? Ou $\sqrt{121}$?
Sugestão: faça por tentativas

7) Ache as raízes:
a) $\sqrt{16}$
b) $\sqrt{100}$

3 – PROPRIEDADES DA RAIZ QUADRADA.

Observe atentamente as situações abaixo, pois através delas conheceremos algumas propriedades da raiz quadrada de um número real.

Situação - 1
a) Qual a raiz quadrada de 81? Por quê?

Podemos pensar em um número que elevado ao quadrado, resulte em 81. Esse número pode ser +9, pois (+9). (+9) = $(+9)^2$ = 81, então, $\sqrt{81} = +9$.

Existe um outro número que satisfaça essa condição?

Sim, esse número é o (-9), ou seja, $(-9)^2 = (-9) \cdot (-9) = +81$, então a $\sqrt{81}$ também pode ser (-9).

Sendo assim, podemos indicar:

$\pm\sqrt{81} = -9$ e $\sqrt{81} = -9$

b) A raiz quadrada de –25 é um número real? Por quê?

Vamos pensar em um número real que elevado ao quadrado dê como resultado –25. Esse número não existe, pois, sabemos que qualquer número elevado ao quadrado tem como resultado um número positivo.

Logo, não existe a raiz quadrada real de –25, pois não existe um número real que elevado ao quadrado, resulte –25.

c) Existe diferença entre $-\sqrt{25}$ e $\sqrt{-25}$? Justifique a sua resposta.

d) E, quanto é a raíz quadrada de zero?

Sabemos que $0^2 = 0.0 = o$, então, $\sqrt{0} = 0$.
Logo, a raiz quadrada de zero é zero, pois $0^2 = 0$.
Podemos estabelecer, então a seguinte propriedade:

Existe $\sqrt{a}$, quando a é um número positivo, maior ou igual a zero.
Não existe $\sqrt{a}$, quando a é um número menor que zero.

Situação - 2

Qual é o resultado de $\sqrt{\frac{4}{9}}$?

Sabendo que a $\sqrt{4} = 2$ e $\sqrt{9} = 3$, temos que $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

Ou $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$, obtemos o mesmo resultado.

Logo, o resultado é $\frac{2}{3}$.

Sendo assim, estabelecemos a seguinte propriedade:

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, sendo a e b números positivos ($b \neq 0$), e n um número natural, maior ou igual a dois.

ATIVIDADE - XI

1) Escreva nos parênteses sim ou não, respondendo corretamente a questão:

Existe a raiz quadrada real de:

a) 49 ? ( )
b) 15 ? ( )
c) -81 ? ( )
d) 20 ? ( )
e) -25 ? ( )
f) 1 ? ( )

2) Calcule:

a) $-\sqrt{100}$
b) $\sqrt{169}$
c) $-\sqrt{0,36}$
d) $\sqrt{225}$
e) $-\sqrt{\frac{4}{49}}$
f) $\sqrt{\frac{169}{81}}$

U N I D A D E 8

EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Há cerca de 4000 anos os babilônios já resolviam problemas envolvendo cálculos que hoje conhecemos como equação do 2º grau.

Estes problemas eram escritos em forma de textos e a sua resolução era através de tentativas.

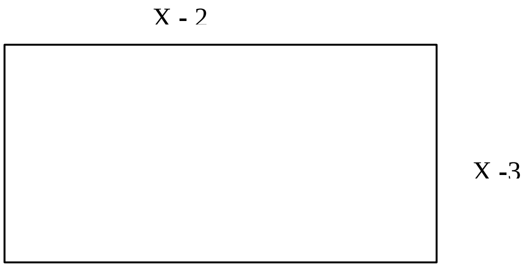
Ao longo dos séculos foram se aperfeiçoando as escritas da equação do 2ºgrau, bem como, foram aparecendo vários métodos para sua resolução.

Hoje, as contribuições deixadas pelos matemáticos nos facilitou tanto na escrita como nas técnicas de resolução de problemas de 2º grau.

Observe as seguintes situações:

Situação - 1

As dimensões de um terreno estão representadas na figura abaixo. A área desse terreno é 30 m^2. Quanto ele mede de comprimento e de largura?



Vamos encaminhar o nosso raciocínio da seguinte maneira:

Sendo o terreno de forma retangular, podemos expressar sua área como: o produto do comprimento pela largura.

Assim: **A = (x-2) (x-3)**

Como a área do terreno é de 30 m^2, podemos escrever:
(x-2) (x-3) = 30

Efetuando os cálculos algébricos, temos:

$x^2 – 3x – 2x + 6 = 30$
$x^2 – 5x +6 – 30 = 0$
$x^2 – 5x - 24 = 0$

Mas o que é uma equação do 2º grau?

Vamos retornar a definição d equação estudada anteriormente.

> ***"Equação é toda sentença matemática que representa uma igualdade e na qual existem uma ou mais letras que indicam um número desconhecido."***

Verifique se a expressão: $x^2 – 5x - 24 = 0$, satisfaz essa definição.

Você sabe porque uma expressão como essa é denominada de **equação do 2º grau?** Vejamos o por quê, lendo a observação que segue:

Como você já aprendeu o que é uma equação do 1º grau, então compare:

$x- 5 = 0$ com $x^2 – 5x – 24 = 0$

Quais são semelhanças e as diferenças existentes entre as duas equações?

Uma das diferenças é o expoente da variável x.

Observe que no primeiro caso o expoente de x é um, portanto essa sentença é chamada de equação do 1º grau.

No segundo caso o maior expoente da variável x é dois, daí o nome equação do 2º grau na variável x.

Portanto, definimos:

> **Equação do 2º grau na incógnita x é toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$.**

Os termos **a, b e c** são chamados coeficientes da equação.

Voltando à equação $x^2 – 5x – 24 = 0$

- coeficiente **(a)** é representação por 1.
- coeficiente **(b)** é representado por –5.
- O coeficiente **(c)** é representado por –24.

Para se encontrar a medida do comprimento e da largura do terreno da **situação 1** é necessário resolver essa equação do 2º grau.

Resolução da equação do 2º grau.

Resolver uma equação do 2º grau significa determinar as suas **raízes**. **Raiz** de uma equação é o número real que ao substituir a variável de uma equação transforma-a numa sentença verdadeira.

Podemos resolver a equação do 2º grau através da fórmula de **Báskara:**

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão $b^2 - 4ac$ (n.º real) é comumente representada pela letra grega Δ (delta) e chamada de discriminante da equação.

Vamos resolver a equação do problema da situação - 1

$X^2 - 5x - 24 = o$

$\Delta = b^2 - 4\,ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4.\,1.\,(-24)$

$\Delta = 25 + 96$

$\Delta = 121$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' = \frac{-(-5)+121}{2.1} \Rightarrow x' = \frac{5+11}{2} \Rightarrow x' = \frac{16}{2} \Rightarrow x' = 8$$

$$x'' = \frac{-(-5)-121}{2.1} \Rightarrow x'' = \frac{5-11}{2} \Rightarrow x'' = -3$$

As raízes dessa equação são:

X’ = 8 e x” = -3

As dimensões do terreno da situação 1 são:

- Comprimento x-2
- Largura x-3

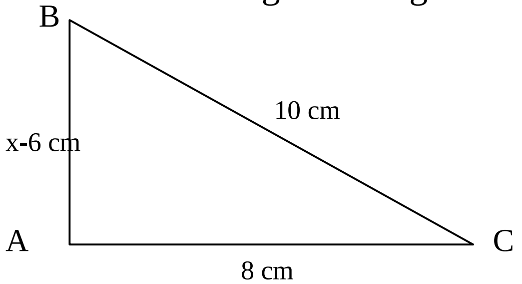
Substituindo x por 8 temos:

- Comprimento 8-2 = 6
- Largura 8-3 = 5

Substituindo x por –3 temos:
Comprimento   -3-2=-5
Largura   -3-3=-6

Como não há comprimento e largura menores que zero, concluímos que as dimensões do terreno são 5m por 6m.

Situação – 2
Quanto mede o cateto menor do triângulo retângulo abaixo?



No triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma do quadrado dos catetos.

Assim:
$10^2 = 8^2 + (x\text{-}6)^2$

Efetuando os cálculos algébricos temos:

$100 = 64+x^2 – 12x + 36$
$x^2 – 12x = 100 – 64 – 36$
$x^2 – 12x = 0$

Comparando essa equação com a forma da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, o que você observa?

Se você respondeu que falta o termo c está correto.

Portanto, a equação $x^2 – 12x = 0$ é uma equação do 2º grau **incompleta, pela falta** do c $\Rightarrow$ c = 0

Resolvendo a equação, temos:
a=1
b=-12
c=0
$\Delta = b^2 – 4\ ac$
$\Delta = (-12)^2 – 4.1.0$

$\Delta = 144 - 0$
$\Delta = 144$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' = \frac{-(-12) + \sqrt{144}}{2} \Rightarrow x' = \frac{12+12}{2} \Rightarrow x' = \frac{24}{2} \Rightarrow x' = 12$$
$$x'' = \frac{-(-12) - \sqrt{144}}{2} \Rightarrow x'' = \frac{12-12}{2} \Rightarrow x'' = \frac{0}{2} \Rightarrow x'' = 0$$

As raízes dessa equação são:
x' = 12 e x” = 0

A dimensão do cateto menor do triângulo da situação 2 é:

X - 6

Substituindo, pelos valores numéricos de x, temos:

Para x = 0

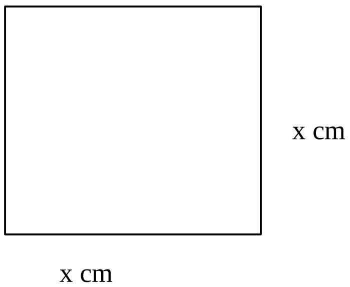
Cateto menor = x –6 $\Rightarrow$ 0-6=--6

Para x = 12

Cateto menor = x –6 $\Rightarrow$12-6 = 6

Como a medida de um lado do triângulo não pode ser negativa, concluímos que o cateto maior vale 6 cm.

Situação – 3
A área do quadrado, da figura abaixo, é igual a 36 cm^2. Calcule o perímetro, cujo lado é representado por x cm.



Podemos expressar a área do quadrado como produtos dos lados.

Assim:
x.x

Como a área do quadrado acima é igual a 36 cm^2, podemos escrever:
x.x = 36

Efetuando os cálculos algébricos, temos:
$x^2 = 36$
$x^2 - 36 = 0 \Rightarrow$

Resolvendo a equação, temos:
a = 1
b = 0
c = -36
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = 0^2 - 4.1.(-36)$
$\Delta = 0+144$
$\Delta = 144$

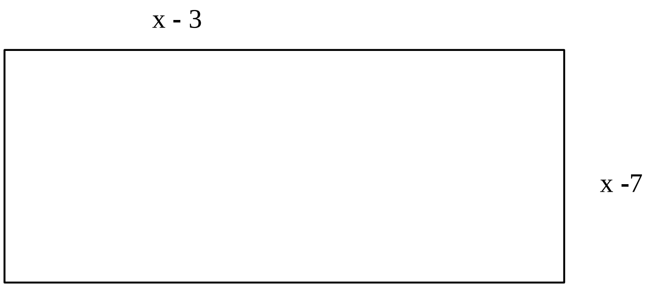
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' = \frac{-0+\sqrt{144}}{2.1} \Rightarrow x' = \frac{0+12}{2} \Rightarrow x' = \frac{12}{2} \Rightarrow x' = 6$$
$$x'' = \frac{-0-\sqrt{144}}{2.1} \Rightarrow x'' = \frac{0-12}{2} \Rightarrow x'' = \frac{-12}{2} \Rightarrow x'' = 6$$

O lado mede 6 cm, então o perímetro é 4.6 = 24 cm

ATIVIDADE - XII

1) Quanto medem os lados do terreno abaixo, cuja área é de 60 m^2



2) um terreno retangular mede de frente 13m a menos que a lateral e sua área é 300 m^2 . Quais são as medidas desse terreno?

3) O quadrado menos o dobro da idade de André é igual a 15. Qual é a idade de André?

4) Determinar o número cuja soma do seu quadrado com o dobro é igual a 8 vezes esse mesmo número.

5) O quadrado da idade de Jair é 144. Calcule sua idade.

6) Se do quadrado da quantia que Rose possui, subtrairmos 12 reais, obteremos 109 reais. Quanto Rose possui?

7) Resolva as seguintes equações do 2º grau:

a) $x^2 – 16 = 0$
b) $x^2 - 6x = 0$
c) $(x-2)^2 = 4 – x (x +3)$
d) $x^2 – x – 12 = 0$
e) $7 x^2 - 2x – 1 = 0$
f) $(x+2)^2 + x = 0$

BIBLIOGRAFIA

ASIMOV, Isaac. **No mundo dos Números**, Rio de Janeiro, Editora S/A, 1983.

BONGIOVANNI, Vicenzo; LEITE, Olímpio Rudinin Vissoto; LAUREANO, José Luiz Tavares. **Matemática e Vida.** São Paulo, Editora Ática S.A. 1990.

BOYER, Carl Benjamim. **História da Matemática.** São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda. 1974.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JR., José Ruy. **A conquista da Matemática**. São Paulo, Editora FTD, Edição renovada.

GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JR., José Ruy. **Aprendizagem e Educação Matemática.** São Paulo, Editora FTD, 1990.

GOMES, Carmem; CRUSIUS, Maria Fialho; DANYLUK, Osana Sônia. **Frações e Números Decimais.** Passo Fundo, Gráfica da Universidade de Passo Fundo, 1992.

IMENES, Luiz Márcio. **Vivendo a Matemática.** São Paulo, Editora Scipione – 7ª ed. 1992.

IMENES, Luiz Márcio Pereira; JAKUBO, José; LELLIS, Marcelo Cestari. **Para que serve a Matemática.** São Paulo, Atual Editora, 1992.

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. **Matemática na Medida Certa.** São Paulo, Editora Scipione, 1990.

JORNAL DO TELECURSO 1º GRAU. Rio de Janeiro, Editora Rio Gráfica, 5ª Edição, 3ª fase, Fundação Roberto Marinho, 1985.

KARLSON, Paul. **A magia dos números.** Porto Alegre – RS, Editora Globo S/A, 1961.

KIYUKAWA, Rokusaburo; SHIGEKIYO, Carlos Tadashi; YAMAMOTO, Kazuhito. **Os elos da matemática.** São Paulo – SO, Editora Saraiva, 3ª edição, 1993.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Para aprender Matemática.** São Paulo – SP, Editora Saraiva, 4ª edição, 1991.

RAMOS, Luzia Faraco. **Série "A" Descoberta da Matemática.** São Paulo – SP, Editora Ática S/A 1993.

ROSA NETO, Ernesto. **Didática da Matemática.** São Paulo – SP, Editora Ática S/A, 4ª edição, 1992.

RUIZ, Adriano Rodrigues; CARVALHO, Ana Maria Pessoa de. **O conceito de proporcionalidade.** São Paulo, Editora São Paulo, 1990.